LỜI NÓI ĐẦU

Một trong những phương pháp rất mạnh trong toán học dùng nghiên cứu và chứng minh các giả thiết là nguyên lý quy nạp toán học. Phương pháp quy nạp được áp dụng sâu rộng vào hầu hết các dạng toán: Số học, Dãy số, Hình học, BĐT, Tổ hợp,...Trong báo cáo này tôi chỉ đề cập đến áp dụng của phương pháp quy nạp vào một số dạng toán về dãy số.

Trong chương trình toán phổ thông thì toán về dãy số được phân phối thời lượng không nhiều, đặc biệt trong chương trình toán phân ban hiện nay đã lược bỏ nhiều định lý quan trọng.Trong phần lớn các kỳ thi thì dạng toán này hầu như không có. Toán về dãy số thường chỉ giành cho những học sinh khá giỏi trong các kỳ thi cấp Tỉnh và Quốc gia, do vậy nó càng ít được học sinh và cả giáo viên quan tâm đến. Phần vì dạng toán này cũng tương đối khó và trừu tượng đối với học sinh, học sinh gặp nhiều khó khăn và rất ngại khi gặp dạng toán này.

Trong thời gian vừa qua tôi đã thu thập, tích lũy và hệ thống được một số dạng toán về dãy số nhằm phục vụ cho công tác giảng dạy, bồi dưỡng học sinh giỏi của mình. Với mục đích giúp học sinh tiếp cận một số dạng toán đặc trưng về dãy số do đó tôi lựa chọn đề tài này. Các bài toán được lựa chọn chủ yếu cho những học sinh khá, giỏi. Sự phân chia thành các dạng toán và những đánh giá của tôi là theo quan điểm chủ quan của mình, do đó không tránh khỏi những thiếu sót. Kính mong các thầy cô và các bạn đồng nghiệp đọc và cho ý kiến góp ý để tài liệu này được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cám ơn !

Vĩnh Tường 5 . 2009

Tác giả: **Nguyễn Minh Hải**

Mục lục

PHẦN 1. MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ NGUYÊN LÝ QUY NẠP TOÁN HỌC VÀ DÃY SỐ.

I.Phương pháp quy nạp toán học

Sau đây là ba dạng của nguyên lí quy nạp toán học thường được dùng trong những bài toán ở THPT.

1. Định lí 1. Cho n_0 là một số nguyên dương và P(n) là mệnh đề có nghĩa với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Nếu: 1^0. $P(n_0)$ là mệnh đề đúng

2^0. Nếu P(k) đúng thì P(k+1) cũng đúng với mỗi số tự nhiên $k \geq n_0$.

Khi đó mệnh để P(n) đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Ví du 1. Cho dãy số (u_n) xác đinh bởi: $u_n = n^2$.

CMR tổng của n phần tử đầu tiên của dãy được tính: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Chứng minh.

Với n = 1. Đẳng thức đúng.

Giả sử ĐT đúng với n = k (k ≥ 1), tức là có: $S_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Ta chứng minh ĐT đúng với n = k+1, tức CM: $S_{k+1} = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Thật vậy. Ta có $S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \dfrac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

Vậy ĐT đúng với mọi số nguyên dương.

2. Định lí 2. Cho p là số nguyên dương và dãy các mệnh đề: P(1), P(2), …, P(n),…

Nếu: 1^0. P(1), P(2), …, P(p) là những mệnh đề đúng

2^0. Với mỗi số tự nhiên $k \geq p$ các mệnh đề $P(k-p+1), P(k-p+2), ..., P(k)$ đúng, suy ra mệnh đề P(k+1) cũng đúng.

Khi đó mệnh để P(n) đúng với mọi số nguyên dương n.

Ví du 2. Cho $v_0 = 2, v_1 = 3$ và với mỗi số tự nhiên k có đẳng thức: $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1}$.

CMR: $v_n = 2^n + 1$.

Chứng minh.

- Dễ thấy mệnh đề đúng với n = 0, 1.

- Giả sử với mỗi số tự nhiên $k \geq 2$ mđ đúng với n = k và n = k – 1.

Tức là có: $v_k = 2^k - 1, v_{k-1} = 2^{k-1} - 1.$

-Ta chứng minh mđ đúng với n = k + 1.

TV. Theo CT truy hồi $v_{k+1} = 3v_k - 2v_{k-1} = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1. (dpcm)$

Vậy bài toán được chứng minh.

3. <u>Định lí 3</u>. Cho dãy các mệnh đề: P(1), P(2), …, P(n),…

Nếu: 1^0. P(1) là những mệnh đề đúng

2^0. Với mỗi số tự nhiên $k \geq 1$ các mệnh đề $P(1), P(2), ..., P(k)$ đúng,

suy ra mệnh đề P(k+1) cũng đúng.

Khi đó mệnh để P(n) đúng với mọi số nguyên dương n.

Dạng quy nạp này mạnh hơn dạng thứ hai ở bước quy nạp.

<u>Ví du 3</u>. Cho dãy số (u_n) xác đinh bởi: $U_n = x^n + \frac{1}{x^n}, \forall n \in N^*, x \in N^*.\quad U_1 \in Z.$

CMR (u_n) là dãy các số nguyên.

<u>Chứng minh</u>

Với n = 1 mệnh đề hiển nhiên đúng.

Giả sử với mọi số tự nhiên từ 1 đến k, u_k là số nguyên. Ta CM u_{k+1} cũng nguyên.

TV. $$u_{k+1} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = (x + \frac{1}{x})(x^k + \frac{1}{x^k}) - (x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) = u_1.u_k - u_{k-1} \in Z$$

Vậy (u_n) là dãy các số nguyên.

II. Một số vấn đề về dãy số.

2.1. Dãy số tăng, giảm (đơn điệu).

ĐN. Dãy số (u_n) được gọi là dãy tăng nếu với mọi $n \in N^*$ ta có $u_n < u_{n+1}$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy giảm nếu với mọi $n \in N^*$ ta có $u_n > u_{n+1}$.

Dãy số tăng và dãy giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.

2.2. Dãy bị chặn.

ĐN +) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn trên, nếu tồn tại một số M sao cho

$$u_n \le M, \forall n \in N^*.$$

+) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn dưới, nếu tồn tại một số m sao cho

$$u_n \ge m, \forall n \in N^*.$$

+) Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \le u_n \le M, \forall n \in N^*$.

$$(\Leftrightarrow \exists M > 0 : |u_n| \le M, \forall n \in N^*)$$

2.3. Giới hạn dãy số.

ĐN 1. ***Dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mỗi số dương nhỏ tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó. Ta viết lim(u_n) = 0 hoặc limu_n = 0 hoặc $u_n \to 0$.***

Cách phát biểu mới này giúp học sinh hình dung được dãy số có giới hạn 0 một cách thuận lợi hơn, tuy nhiên định nghĩa này khó diễn đạt trong khi chứng minh một số định lý về giới hạn. Do vậy tôi xin trở lại định nghĩa trước đây:

ĐN 2. ***Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 nếu với mỗi số dương ε bất kỳ, tồn tại một số nguyên dương N sao cho*** $\forall n \in N^*, n > N \Rightarrow |u_n| < \varepsilon$.

Ta viết lim(u_n) = 0 hoặc limu_n = 0 hoặc $u_n \to 0$.

ĐN 3. Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu lim(u_n – L) = 0.

Ta viết lim(u_n) = L hoặc limu_n = L hoặc $u_n \to L$.

ĐN 4.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn +∞ nếu với mỗi số dương tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tuỳ ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số dương đó.

Định lí 1. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).

Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 2. Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Định lí 3. Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó:

a) $\lim |u_n| = |L|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4. Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó:

$\lim(u_n \pm v_n) = L \pm M$. $\quad$ $\lim(u_n.v_n) = L.M$

$\lim(c.u_n) = c.L$ $\quad$ $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ nếu $M \ne 0$.

Định lí 5. Nếu $\lim |u_n| = +\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$.

Vận dụng các kết quả trên, ta có thể chứng minh được các định lý sau:

Định lí 6.***(Điều kiện cần) Một dãy số có giới hạn thì nó bị chặn.***

Định lí 7. ***(Duy nhất) Một dãy số có giới hạn thì giới hạn đó là duy nhất.***

Định lí 8. ***(Giới hạn kẹp)*** Cho ba dãy số (u_n), (v_n), (w_n) thỏa mãn:

1^0. $v_n \le u_n \le w_n, \forall n \in N^*$.

2^0. $\lim v_n = \lim w_n = A$ $\quad$ thì $\lim u_n = A$.

Ta thừa nhận định lí sau đây.

Định lí 9. ***(Điều kiện đủ- Định lí Waiesstras)***

Một dãy tăng và bị chặn trên thì có giới hạn.

Một dãy giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn.

Hiện nay bốn Định lý trên không được giới thiệu trong chương trình, tuy nhiên có thể chứng minh được Định lí 6, 7, 8 từ các định lý có sẵn. Trong báo cáo này tôi vẫn xin được sử dụng để các dạng toán được đa dạng hơn.

2.4. Cấp số cộng.

Định nghĩa. Cấp số cộng là một dãy số, trong đó, kể từ số hạng thứ hai mỗi số hạng đều là tổng của số hạng liền trước với một số không đổi gọi là công sai.

Tính chất. Cho cấp số cộng (u_n) công sai d, khi đó $\forall n \in N^*$ ta có:

1^0. $u_{n+1} = u_n + d; \quad u_n = u_1 + (n-1)d.$

2^0. $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2}.$

3^0. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n}{2}(u_1 + u_n) = \dfrac{n}{2}\left[2u_1 + (n-1)d\right].$

2.5. Cấp số nhân.

Định nghĩa. Cấp số nhân là một dãy số, trong đó, kể từ số hạng thứ hai mỗi số hạng đều là tích của số hạng liền trước với một số không đổi gọi là công bội.

Tính chất. Cho cấp số nhân (u_n) công bội q, ta có:

1^0. $u_{n+1} = u_n.q; \quad u_n = u_1.q^{n-1}.$

2^0. $|u_{n+1}| = \sqrt{u_n.u_{n+2}}$

3^0. $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q-1}; \quad (q \neq 1)$

Tổng của cấp số nhân vô hạn công bội q ($|q| < 1$)

$$S = \lim S_n = \lim u_1.\frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{u_1}{1-q}. \quad (q \neq 1)$$

III. Một số dạng toán về dãy số thường gặp.

1. ***Chứng minh dãy số tăng, giảm, bị chặn, dãy có giới hạn.***
2. ***Chứng minh dãy số lập thành cấp số cộng, cấp số nhân, tính chất của cấp số.***
3. ***Tìm công thức tổng quát của dãy số.***
4. ***Chứng minh dãy số có giới hạn và tìm giới hạn dãy số.***
5. ***Một số dạng khác: BĐT về dãy số, chứng minh tính chất chia hết, chứng minh dãy số nguyên…..***

PHẦN 2. ÁP DỤNG TRONG GIẢI TOÁN

I. Chứng minh dãy số tăng, giảm và bị chặn.

Bài 1.1 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2. \\ u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}, n \geq 3. \end{cases}$ CMR: $u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n, \forall n \in N^*.$

Giải

Ở bài toán này u_n cho bởi công thức truy hồi, được tính theo u_{n-1} và u_{n-2} do đó ta vận dụng nguyên lí quy nạp thứ hai để chứng minh.

- Với n = 1, n = 2 mệnh đề đúng.

- Giả sử mđ đúng với n = k – 1, và n = k (k >1), tức là có: $u_{n-1} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{n-1}, u_n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^n.$

- Ta chứng minh mđ đúng với n = k + 1.

TV. Ta có: $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} \leq 2.\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{5}{2}\right)^n \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{n+1}$.(đpcm)

Bài 1.2 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1. \\ u_{n+1} = \dfrac{n}{2(n+1)}u_n + \dfrac{3(n+2)}{2(n+1)}, n \in N^*. \end{cases}$

a). CM dãy số bị chặn trên.

b). CM dãy số tăng.

Giải

Đây là bài toán không khó nếu dự đoán được dãy số bị chặn trên bởi số nào thích hợp nhất? Ta có thể xuất phát từ yêu cầu thứ hai của bài toán:

Có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(n+2)}{n+1} > 0 \Rightarrow u_n < 3.$

a). Ta CM quy nạp theo nguyên lí thứ nhất: $u_n < 3, \forall n \in N^*.$

- Giả sử mđ đúng với n = k khi đó có:

$$u_{k+1} = \frac{k}{2(k+1)}u_k + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} < \frac{3k}{2(k+2)} + \frac{3(k+2)}{2(k+1)} = 3.$$

- Vậy mđ đúng với n = k +1.

b). Theo phần (a) có: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(3-u_n)(n+2)}{n+1} > 0.$

Vậy dãy (u_n) tăng và bị chặn trên.

Bài 1.3 Chứng minh dãy $u_n = (1+\frac{1}{n})^n$ là dãy tăng và bị chặn trên.

Giải

+) Ta chứng minh $u_n < 3, \forall n \in N^*$.

- Với n = 1, n = 2. BĐT hiển nhiên đúng.
- Với n ≥ 3, ta chứng minh BĐT phụ sau đây: $(1+\frac{1}{n})^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}, \forall k : 1 \le k \le n.$ (1)

TV. – Với k = 1, BĐT đúng .

- Giả sử (1) đúng với k ($1 \le k \le n-1$), tức : $(1+\frac{1}{n})^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}$.

Khi đó: $(1+\frac{1}{n})^{k+1} < (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^k < (1+\frac{1}{n})(1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}) = 1+\frac{k+1}{n}+\frac{k^2+k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3}$.

Mặt khác dễ dàng CM: $\frac{k^2+k}{n^2}+\frac{k^2}{n^3} < \frac{(k+1)^2}{n^2}$.

$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^{k+1} < 1+\frac{k+1}{n+1}+\frac{(k+1)^2}{(n+1)^2}$. Vậy BĐT đúng với k + 1.

KL. BĐT (1) đúng với mọi số nguyên dương k, ($1 \le k \le n$)

-) Với k = n ta có : $(1+\frac{1}{n})^n < 1+\frac{n}{n}+\frac{n^2}{n^2} = 3$.

+) Chứng minh dãy tăng.

Áp dụng BĐT Cauchy cho n + 1 số dương không đồng thời bằng nhau, ta được:

$$1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{1}{n})+...+(1+\frac{1}{n}) > (n+1)\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n}.$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n} \Rightarrow (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^n \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in N^*.$$

Bài 1.5 Xét tính đơn điệu, bị chặn của các dãy số sau:

1^0. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{2}, n \in N^*. \end{cases}$ 2^0. $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}, n \in N^*. \end{cases}$

Giải

1^0. Bằng quy nạp ta chứng minh (u_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0.

2^0. Bằng quy nạp ta chứng minh (u_n) là dãy tăng và bị chặn trên bởi 2.

II. Công thức tổng quát của dãy số.

Bài 2.1 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 3. \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}, n \geq 2. \end{cases}$ CMR $u_n = 2^{n-1} + 1$. Tính S_n.

Giải

Quy nạp. Với n =1; n = 2. Đúng.

Giả sử mđ đúng với k-1 và k (k > 1), ta chứng minh mđ đúng với n = k + 1.

Thật vậy: Có $u_{k-1} = 2^{k-2} + 1, \quad u_k = 2^{k-1} + 1 \Rightarrow u_{k+1} = 3(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) = 4.2^{k-2} + 1 = 2^k + 1.$

Mệnh đề được chứng minh.

Khi đó: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + (1+2) + ... + (1 + 2^{n-1}) = 2^n + n - 1.$

Bài 2.2 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n}, \forall n \in N^*. \end{cases}$

a) CMR: $u_n < 0, \forall n \in N^*.$

b) Đặt $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n}$. CMR $v_n = \dfrac{3}{2} - n, \forall n.$

c). Tìm CTTQ tính $u_n, S_n = u_1 + u_2 + ... u_n$.

Giải

a). Chứng minh bằng quy nạp.

- Với n = 1 mđ đúng.

- Giả sử mđ đúng với n = k (k ≥ 1), tức $u_k < 0$. Khi đó $u_k < 0, 1 - u_k > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_k}{1 - u_k} < 0.$

- Vậy mđ đúng với n = k +1.

b). Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \Rightarrow u_n.u_{n+1} = u_{n+1} - u_n. \Rightarrow v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1}} - \dfrac{u_n + 1}{u_n} = \dfrac{u_n - u_{n+1}}{u_n.u_{n+1}} = -1.$

$\Rightarrow v_{n+1} = v_n - 1 \Rightarrow (v_n)$ là CSC công sai d = -1, $v_1 = \dfrac{u_1 + 1}{u_1} = \dfrac{-2 + 1}{-2} = \dfrac{1}{2}.$

$\Rightarrow v_n = v_1 + (n-1)d = \dfrac{1}{2} + (n-1)(-1) = \dfrac{3}{2} - n.$

Từ $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n} \quad \Rightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n - 1} = \dfrac{-2}{2n - 1}.$

Cách 2. CM quy nạp.

Bài 2.4 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 2. \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2, n \geq 2. \end{cases}$ CMR: $u_n = (n-1)^2 + 1$. Tìm S_n ?

Giải

- Hiển nhiên công thức đúng với n = 1, n = 2.
- Giả sử công thức đúng với n = k - 1, n = k tức: $u_{k-1} = (k-2)^2 + 1; u_k = (k-1)^2 + 1$

  Khi đó: $u_{k+1} = 2u_k - u_{k-1} + 2 = 2[(k-1)^2 + 1] - [(k-2)^2 + 1] + 2 = k^2 + 1 = [(k+1)-1]^2 + 1$

  Vậy công thức đúng với n = k + 1.

Khi đó: $S_n = (n-1)^2 + (n-2)^2 + ... + 1^2 + n = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6} - n.$

Chú ý: ***Nếu bài toán yêu cầu chứng minh $u_n - 1$ là số chính phương thì cách làm hoàn toàn vẫn như vậy.***

Bài 2.5 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 3, u_2 = 2. \\ u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} - 1, n \geq 2. \end{cases}$

CMR: $u_n = \dfrac{q^{n-1} - 1}{q - 1} v_1 + n + 2 = -2^n + n + 4.$ Tính S_n ?

Giải

Quy nạp: Giả sử: $u_{k-1} = -2^{k-1} + (k-1) + 4; u_k = -2^k + k + 4$

$$\Rightarrow u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1} - 1 = 3[-2^k + k + 4] - 2[-2^{k-1} + k + 3] - 1 = 8.2^{k-1} + k + 5 = -2^{k+1} + (k+1) + 4$$

Bài 2.6 Cho dãy (u_n): $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2.u_{n-1} + 1}, u_0 \neq \dfrac{-1}{2n}, \forall n \in N^*$. Tìm CTTQ của u_n?

Giải

- Nếu $u_0 = 0 \Rightarrow u_n = 0, \forall n \in N.$
- Nếu $u_0 \neq 0.$ Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n \neq 0, \forall n \in N.$

  Khi đó: $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{2u_{n-1} + 1}{u_{n-1}} = 2 + \dfrac{1}{u_n}.$

  Đặt $v_n = \dfrac{1}{u_n} \Rightarrow v_n = 2 + v_{n-1} \Rightarrow (v_n)$ là CSC công sai $d = 2.$

$$\Rightarrow v_n = v_0 + nd = \frac{1}{u_0} + 2n \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{u_0}{2n.u_0 + 1}.$$

III. Tìm giới hạn của dãy số.

Nếu dãy số cho bởi CTTQ thì ta thường sử dụng các phương pháp tính giới hạn của dãy số để tính. Trong nhiều trường hợp ta phải biến đổi CTTQ đó về dạng đơn giản hơn trước khi tính giới hạn.

Một số phương pháp tính giới hạn của dãy số:

- ***Nhân liên hợp, đối với giới hạn dạng ∞ - ∞***
- ***Chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của n, đối với giới hạn dạng*** $\frac{\infty}{\infty}$;
- ***Kết hợp hai phương pháp trên cho giới hạn dạng*** $\frac{\infty-\infty}{\infty};\frac{\infty}{\infty-\infty};\frac{\infty-\infty}{\infty-\infty};\frac{0}{0}$.
- ***Sử dụng định lý giới hạn kẹp***
- ***Sử dụng điều kiện đủ để dãy số có giới hạn, thiết lập biểu thức về giới hạn. Kết quả giới hạn là nghiệm của một phương trình nào đó.***

<u>Bài 3.1</u> Tính các giới hạn sau:

$$A=\lim(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n) \qquad B=\lim\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$$

$$C=\lim\frac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}-n^2} \qquad D=\lim\frac{3^n+2^{n+1}}{2^n+5.3^n}$$

$$E=\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n} \qquad F=\lim\frac{\sqrt{4n^2+1}-2n-1}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$$

HD.

$$A=\frac{1}{3};\ B=\infty;\quad C=0;\quad D=\frac{1}{5};\quad E=7;\quad F=-\frac{1}{2}.$$

<u>Bài 3.2</u> Tính giới hạn của các dãy số sau

$$A=\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right) \qquad B=\lim\left(\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

$$C=\lim(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})...(1-\frac{1}{n^2}) \qquad D=\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\frac{5}{n^2}+...+\frac{2n-1}{n^2}\right)$$

$$E=\lim\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}})$$ {Đề thi HSG lớp 11 năm 2007}

Học sinh thường áp dụng sai công thức tính giới hạn của tổng và tích các dãy số. Hai công thức này chỉ áp dụng đối với tổng và tích hữu hạn các dãy số. Học sinh thường áp dụng cho tổng, tích vô hạn dẫn đến kết quả sai.

Giải

a). Nhận xét: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \forall n \in N^*$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) = 1-\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow A = \lim u_n = \lim(1-\frac{1}{n}) = 1.$$

b). Nhận xét: $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}), \forall n \in N^*$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}[(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3})+(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4})+...+(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)})]$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)} \Rightarrow B = \frac{1}{4}.$$

c). $u_n = \frac{2^2-1}{2^2}.\frac{3^2-1}{3^2}.....\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1.3}{2.2}.\frac{2.4}{3.3}....\frac{(n-1)(n+1)}{n.n} = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$

d). $u_n = \frac{1+3+5+...+(2n-1)}{n^2} = \frac{n^2}{n^2} \Rightarrow D = 1.$

e). Ta có: $\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{(2n+1)-(2n-1)} = \frac{\sqrt{2n+1}}{2}-\frac{\sqrt{2n-1}}{2}, \forall n > 1.$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}.[(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})+(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})+...+(\frac{\sqrt{2n+1}}{2}-\frac{\sqrt{2n-1}}{2})] = \frac{1}{\sqrt{n}}.\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

$$\Rightarrow E = \lim u_n = \lim\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bài 3.3 Tính các giới hạn sau

$$A = \lim\frac{1+2+3+...+n}{2n^2+n+3} \qquad B = \lim\frac{1+2^2+3^2+...+n^2}{4n^3+1}$$

$$C = \lim\frac{1+2^3+3^3+...+n^3}{n^4+3n^2+1} \qquad C = \lim\frac{1+3^2+5^2+...+(2n-1)^2}{3n^3-n+4}$$

Giải

Để đơn giản biểu thức ta chứng minh quy nạp các công thức sau:

$1^0.\ 1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$2^0.\ 1+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$3^0.\ 1+2^3+3^3+...+n^3=1+8(n-1)+19\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+(n-1)(n-2)(n-3)+\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$

$4^0.\ 1+3^2+5^2+...+(2n-1)^3=\dfrac{1}{3}n(2n-1)(2n+1).$

- Khi đó ta có được các kết quả sau:

$$A=\frac{1}{4}.\qquad B=\frac{1}{12}.\qquad C=\frac{1}{4}.\qquad D=\frac{4}{9}.$$

Trong nhiều bài toán ta không thể đơn giản được CTTQ để sử dụng hai phương pháp nhân liên hợp, hoặc chia cho lũy thừa của n. Khi đó hãy nghĩ đến *Định lí giới hạn kẹp*

Bài 3.4 Tính giới hạn sau.

$$A=\lim\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\qquad B=\lim\frac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}$$

Giải

a). Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}},\forall k\in N,1\le k\le n.$

$$\Rightarrow\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le u_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

mà $\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\qquad\Rightarrow\lim u_n=1\Rightarrow A=1.$

b). Đặt $u_n=\dfrac{1.3.5.7.....(2n-1)}{2.4.6.....(2n)}\quad\Rightarrow u_n^2=\dfrac{1.3^2.5^2.7^2.....(2n-1)^2}{2^2.4^2.6^2.....(2n)^2}\quad=\dfrac{1.3}{2^2}.\dfrac{3.5}{4^2}...\dfrac{(2n-1).(2n+1)}{(2n)^2}.\dfrac{1}{2n+1}$

$$\Rightarrow 0<u_n^2<\frac{1}{2n+1}\quad\Rightarrow 0<u_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

mà $\lim\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0\quad\Rightarrow B=\lim u_n=0.$

Đối với những bài toán mà dãy số cho bởi công thức truy hồi, hoặc cho một hệ thức liên hệ giữa các phần tử thì ta tiến hành như sau:

- ***Tìm CTTQ của dãy số sau đó tìm giới hạn.***
- ***Nếu không tìm được CTTQ thì ta sử dụng điều kiện đủ để dãy số có giới hạn.***

Chứng minh dãy tăng và bị chặn trên hoặc giảm và bị chặn dưới. Sau đó đặt giới hạn vào công thức truy hồi hoặc hệ thức liên hệ giữa các phần tử ta thu được một phương trình với ẩn là giới hạn cần tìm.

Bài 3.5 Cho dãy (u_n): $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}), \forall n \geq 2.\ a > 0, u_1 > \sqrt{a}.$

CMR (u_n) có giới hạn. Tính giới hạn đó.

Giải

- CM quy nạp $u_n > \sqrt{a}, \forall n \in N^*.$

BĐT Cauchy: $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}) \geq \frac{1}{2}.2\sqrt{u_{n-1}.\frac{a}{u_{n-1}}} \geq \sqrt{a}.$

Dấu bằng không xảy ra. $\Rightarrow u_n > \sqrt{a}.$

- Ta chứng minh (u_n) là dãy giảm.

Ta có: $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{1(u_{n-1} + \frac{2}{u_{n-1}})}{2u_{n-1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u_{n-1}^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \Rightarrow u_n > u_{n-1}, \forall n > 1 \quad \Rightarrow (u_n)$ là dãy giảm.

$\Rightarrow \exists L = \lim u_n > 0.$ Ta có: $L = \lim u_n = \lim \frac{1}{2}(u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}}) = \frac{L + \frac{2}{L}}{2} \Rightarrow L = \sqrt{a}.$ Vậy $\lim u_n = \sqrt{a}.$

***Chú ý**: Ở bài toán trên, thực ra chỉ cần giả thiết $a > 0, u_1 > 0.$ Khi đó việc chứng minh hoàn toàn tương tự.*

- Nếu $u_1 = \sqrt{a} \quad \Rightarrow u_n = \sqrt{a}, \forall n \in N^* \quad \Rightarrow \lim u_n = \sqrt{a}.$

- Nếu $u_1 \neq \sqrt{a} \quad \Rightarrow u_n > \sqrt{a}, \forall n > 1 \quad \Rightarrow u_n > 0, \forall n. \Rightarrow \lim u_n = \sqrt{a}.$

Bài 3.6 Cho dãy (u_n): $u_n = \frac{1}{3}(2u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}^2}), \forall n \geq 2.\ a > 0, u_1 > \sqrt[3]{a}.$

CMR (u_n) có giới hạn. Tính giới hạn đó.

Giải

- Tương tự bài 4.6 ta CM quy nạp. $u_n > \sqrt[3]{a}, \forall n \in N^*; (u_n)$ là dãy tăng.

- Đặt $\Rightarrow \exists L = \lim u_n > 0.$ Theo gt có: $L = \lim u_n = \lim \frac{1}{3}(2u_{n-1} + \frac{a}{u_{n-1}^2}) = \frac{2L + \frac{a}{L^2}}{3} \Rightarrow L = \sqrt[3]{a}.$

Vậy $\lim u_n = \sqrt[3]{a}.$

Chú ý*: ở bài toán trên, thực ra chỉ cần giả thiết** $a>0, u_1>0$. ***Khi đó việc chứng minh hoàn toàn tương tự.

- Nếu $u_1=\sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow u_n=\sqrt[3]{a}, \forall n\in N^* \quad \Rightarrow \lim u_n=\sqrt[3]{a}.$

- Nếu $u_1\neq\sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow u_n>\sqrt[3]{a}, \forall n>1 \quad \Rightarrow u_n>0, \forall n. \quad \Rightarrow \lim u_n=\sqrt[3]{a}.$

Bài 3.7 Cho dãy (u_n): $0<u_n<1$ và $u_{n+1}(1-u_n)>\frac{1}{4}$. Tính $\lim u_n$?

Giải

- Chứng minh dãy (u_n) tăng và bị chặn trên.

Theo gt hiển nhiên (u_n) bị chặn trên.

Áp dụng BĐT Cauchy: $u_{n+1}+(1-u_n) \geq 2\sqrt{u_{n+1}(1+u_n)} > 2.\frac{1}{2}=1 \quad \Rightarrow u_{n+1}>u_n, \forall n\in N^*.$

$\Rightarrow$(u_n) tăng

Vậy (u_n) có giới hạn, đặt $a=\lim u_n. \Rightarrow \lim[u_{n+1}(1-u_n)]>\frac{1}{4} \quad \Rightarrow a(1-a)>\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}.$

Bài 3.8 Cho dãy (u_n): $u_1=3, \quad u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4, \forall n\geq 1.$

a). CMR (u_n) là dãy đơn điệu nhưng không bị chặn.

b). Dãy (v_n) xđ: $v_n=\frac{1}{u_1-1}+\frac{1}{u_2-1}+...+\frac{1}{u_n-1}, n\geq 1.$ có giới hạn, tính giới hạn đó.

Giải

a). Quy nạp. - Ta có: $u_2=u_1^2-3u_1+4=4>3=u_1.$

- Giả sử $u_n>u_{n-1}$. Ta CM $u_{n+1}>u_n$. (*)

TV. $(*)\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4>u_n \Leftrightarrow (u_n-2)^2>0$ (đúng). Vậy (u_n) là dãy tăng.

+) Giả sử (u_n) là dãy bị chặn khi đó (u_n) là dãy có giới hạn, đặt $\lim u_n=a.$

Khi đó -). (u_n) là dãy tăng, $u_n>3, \forall n\in N \quad \Rightarrow a=\lim u_n\geq 3.$

-). $a=\lim u_{n+1}=\lim(u_n^2-3u_n+4)=a^2-3a+4 \quad \Rightarrow a=2.$(Vô lý)

Vậy (u_n) là dãy không bị chặn. $\Rightarrow \lim u_n=+\infty.$

b). Từ $u_{n+1}=u_n^2-3u_n+4 \Rightarrow u_{n+1}-2=(u_n-1)(u_n-2) \quad \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{(u_n-1)(u_n-2)}=\frac{1}{u_n-2}-\frac{1}{u_n-1}.$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_n-1}=\frac{1}{u_n-2}-\frac{1}{u_{n+1}-2}.$$

$$\Rightarrow v_n = \frac{1}{u_1 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} + ... + \frac{1}{u_n - 1} = \left(\frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_2 - 2}\right) + \left(\frac{1}{u_2 - 2} - \frac{1}{u_3 - 2}\right) + ... + \left(\frac{1}{u_n - 2} + \frac{1}{u_{n+1} - 2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 < v_n = \left(\frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}\right) < \frac{1}{u_1 - 2} \Rightarrow (v_n)\ b/c.$$

- Vì $u_n > 3 \Rightarrow (v_n)$ là dãy tăng.
- $\lim v_n = \lim(\frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2}) = \frac{1}{u_1 - 2} = 1.$

IV.Một số dạng toán khác

Bài 4.1 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_n^2 \le u_n - u_{n+1} \\ u_n > 0, \forall n \in N^*. \end{cases}$ $CMR: \quad u_n < \frac{1}{n}, \forall n \in N^*.$

Giải

Chứng minh Quy nạp.

- Với n = 1, có: $u_1^2 \le u_1 - u_2 < u_1 \quad \Rightarrow u_1(u_1 - 1) < 0 \quad \Rightarrow u_1 < 1. \,(do\, u_n > 0, \forall n)$

  Vậy mđ đúng với n = 1.

- Với n = 2, có: $u_1^2 \le u_1 - u_2 < u_1 \quad \Rightarrow u_2 \le u_1 - u_1^2 = \frac{1}{4} - (u_1 - \frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.$

  Vậy mđ đúng với n = 2.

- Giả sử có: $u_n < \frac{1}{n}, (n \ge 2)$. Hàm số $f(x) = x - x^2$ đồng biến trên đoạn $[0, \frac{1}{2}]$.

Do $0 < u_n < \frac{1}{n} \Rightarrow f(u_n) < f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$

$$\Rightarrow u_{n+1} \le f(u_n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n^2(n+1)} < \frac{1}{n+1}.$$ Vậy mđ đúng với n +1.

Mệnh đề được chứng minh.

Bài 4.2 Cho hai dãy (a_n) và (b_n) xác định bởi: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}; \; a_1, b_1 > 0.$

$b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}, \forall n \in N^*.$ $\qquad CMR: \quad a_n + b_n \ge 2\sqrt{2n}, \forall n > 2.$

Giải

Chứng minh bằng Quy nạp.

- Dễ ràng chứng minh $a_n, b_n > 0, \forall n \in N^*.$

- Với n = 3 ta có: $a_2.b_2 = (a_1 + \frac{1}{b_1}).(b_1 + \frac{1}{a_1}) = a_1.b_1 + \frac{1}{a_1.b_1} + 2 \ge 4.$

$$a_3.b_3 = (a_2 + \frac{1}{b_2}).(b_2 + \frac{1}{a_2}) = a_2.b_2 + 2 + \frac{1}{a_2}.\frac{1}{b_2} \ge 4 + 2 = 6.$$

$$\Rightarrow a_3 + b_3 \ge 2\sqrt{a_3.b_3} \ge 2\sqrt{2.3}$$ Vậy mđ đúng với n = 3.

- Giả sử mđ đúng với n = k (k >2), tức: $a_k + b_k \ge 2\sqrt{2k}.$

- Ta chứng minh mđ đúng với n = k + 1.

TV. Ta có: $a_{k+1}^2 = (a_k + \frac{1}{b_k})^2 = a_k^2 + \frac{1}{b_k^2} + 2\frac{a_k}{b_k}$; $b_{k+1}^2 = (b_k + \frac{1}{a_k})^2 = b_k^2 + \frac{1}{a_k^2} + 2\frac{b_k}{a_k}$.

$$2a_{k+1}.b_{k+1} = 2a_k.b_k + 4 + \frac{2}{a_k.b_k}$$

Suy ra: $(a_{k+1} + b_{k+1})^2 = (a_k + b_k)^2 + \left[(\frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k})^2 + 4a_k.b_k\right] + 4 \overset{Cosi}{\geq} (a_k + b_k)^2 + 4 + 4 > 8k + 8.$

$\Rightarrow a_k + b_k > 2\sqrt{2(k+1)}$. Vậy mđ đúng với n = k + 1. Kết luận. $a_n + b_n \geq 2\sqrt{2n}, \forall n > 2.$

Bài 4.3 Cho dãy(u_n): $u_o = \frac{1}{2}, u_k = u_{k-1} + \frac{1}{n}.u_{k-1}^2$ $CMR: 1 - \frac{1}{n} < u_n < 1.$

Giải

+) Ta có: $u_k - u_{k-1} = \frac{1}{n}.u_{k-1}^2$ Bằng quy nạp chứng minh được $u_k > u_{k-1}, \forall k = \overline{1.n}$

$$u_k - u_{k-1} = \frac{1}{n}.u_{k-1}^2 \Rightarrow \frac{u_k - u_{k-1}}{u_k.u_{k-1}} = \frac{u_{k-1}}{n.u_k} \Leftrightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{u_{k-1}}{n.u_k}.$$

Do $u_k > u_{k-1}, \forall k = \overline{1.n}$ $\Rightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} < \frac{1}{n}$; $\frac{1}{u_{k-2}} - \frac{1}{u_{k-1}} = \frac{1}{n}$;... ;$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} = \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_k} = (\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1}) + (\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}) + ... + (\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k}) < \frac{k}{n} \leq 1. \Rightarrow 2 - \frac{1}{u_k} < 1 \Rightarrow u_k < 1.$$

+) Lại có: $\frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{u_{k-1}}{n.u_k} = \frac{u_{k-1}}{n.u_{k-1} + u_{k-1}^2} = \frac{1}{n + u_{k-1}} > \frac{1}{n+1}.$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{k-1}} - \frac{1}{u_k} > \frac{1}{n+1}; \frac{1}{u_{k-2}} - \frac{1}{u_{k-1}} > \frac{1}{n+1}; ...; \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_k} > \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$\Rightarrow u_k > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n}$. Vậy mđ được chứng minh.

Bài 4.4 Cho dãy số xác định: $u_n = 4^n + 15n - 1$; $v_n = 10^n + 18n - 28.$

$CMR:$ $u_n \vdots 9$; $v_n \vdots 27, \forall n \in N.$

Giải

+) Chứng minh $u_n \vdots 9.$

- Dễ thấy mđ đúng với n = 0, n = 1.
- Giả sử mđ đúng với n = k, có nghĩa $u_k \vdots 9.$

Khi đó: $u_{k+1} = 4^{k+1} + 15(k+1) - 1 = 4(4^k + 15k - 1) + 18 = 4.u_k + 18 \vdots 9$ Vậy mđ đúng với n = k+1.

Bài 4.5 Giả sử p/t: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n, n \in N^*$.

a. CMR: $a.S_n + b.S_{n-1} + c.S_{n-2} = 0, \forall n \in N, n \geq 3.$

b. Giả sử a = c = 1, b = - 4. CMR: S_n không chi hết cho 3.

Giải.

a. Ta có: $\begin{cases} a{x_1}^2 + bx_1 + c = 0 \\ a{x_2}^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a{x_1}^n + b{x_1}^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0 \\ a{x_2}^n + b{x_2}^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) \Rightarrow a.S_n + b.S_{n-1} + c.S_{n-2} = 0, \forall n \in N, n \geq 3.$

b. Ta có: $S_1 = x_1 + x_2 = 4$. không chia hết cho 3.

$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 16 - 2 = 14$ không chia hết cho 3.

Giả sử S_{k-1}, S_k (k >1)không chia hết cho 3, ta chứng minh S_{k+1} cũng không chia hết cho 3. Thật vậy. Theo (a) có: $S_k = 4S_{k-1} - S_{k-2}$ không chia hết cho 3.

Bài 4.6 Giả sử x_1, x_2.là hai nghiệm của p/t: $x^2 - x - 5 = 0.$ CMR: $x_1^{2009} + x_2^{2009} \in Z.$

Giải.

Chứng minh quy nạp: $S_n = x_1^n + x_2^n \in Z, \forall n \in N^*.$

Sử dụng kết quả bài 5.9: $S_n - S_{n-1} - 5S_{n-2} = 0, \forall n \in N, n \geq 3.$ Trong đó: S_1=1; S_2=11.

Bài 4.7 Tính giới hạn của dãy số

1) $u_n = \dfrac{2}{\sqrt{2}}.\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}.....\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}$ 2) $u_n = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+...+\sqrt{3}}}}$

Giải. Trong bài này ta thừa nhận kết quả: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

1. Quy nạp CT: $\dfrac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}}} = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}, \forall n.$

Khi đó: $u_n = \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{4}}.\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{8}}.....\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = 2^n.\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}} \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{\pi}{2}\lim\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\dfrac{\pi}{2^{n+1}}} = \dfrac{\pi}{2}.$

2. Quy nạp CT: $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}} = 2.\cos\dfrac{\pi}{2^n}$; $\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{3}}} = 2.\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{\sqrt{2-2\cos\dfrac{\pi}{2^n}}}{2-2\cos\dfrac{\pi}{3.2^n}} = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{3.2^{n+1}}} \Rightarrow \lim u_n = \dfrac{1}{3}.$

PHẦN 3. BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1. CMR: $u_n = 3 + 3^3 + 3^5 + ... + 3^{2n-1} \vdots 30.$ $v_n = 12^{2n+1} + 11^{n+2} \vdots 133$

Bài 2. Cho x_1 , x_2 là nghiệm của phương trình $x^2 - 27x + 14 = 0.$

CMR $S_n = x_1^n + x_2^n, \forall n \in N.$ không chia hết cho 715.

Bài 3. Ký hiệu $R_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}$ căn bậc hai n lần.

$CMR:$ $\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}R_{n-1},$ $\sin\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - R_{n-2}}.$

Bài 4. Cho dãy (a_n) xác định : $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n = 0, \forall n \in N^*, a_1 = 0, a_2 = 1.$ Tìm a_n ?

Bài 5. Cho dãy (S_n): $S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}}(2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + ... + \frac{2^n}{n}), \forall n \in N^*.$

CM dãy (S_n) đơn điệu giảm và bị chặn dưới.

Bài 6. Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 = b + 1.$

Dãy số (u_n) được xác định: $u_0 = 0, u_{n+1} = au_n + \sqrt{b.u_n^2 + c^2}, \forall n \in N.$

CMR mọi số hạng của dãy đều là số chính phương.

Bài 7. Cho hai dãy số $a_n = 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1;$ $b_n = 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1, \forall n \in N^*.$

CMR với mỗi n chỉ có một và chỉ một trong hai số a_n, b_n chia hết cho 5.

Bài 8. Dãy(a_n) là một CSC, $a_n > 0, \forall n \in N^*.$

Giả sử: $a_1 + a_2 + ... + a_n = \alpha;$ $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} = \beta.$ Tính $P = a_1.a_2.....a_n$ theo $\alpha, \beta.$

Bài 9. Cho dãy (u_n): $u_{n+1} = 4.u_n + 5;$ $(n \ge 1), u_1 = 1.$ Xác định CTTQ tính u_n ? S_n ?

Bài 10. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = \alpha, u_2 = \beta. \\ a.u_{n+1} = (a+b)u_n - bu_{n-1} - c, n \ge 2. \end{cases}$ Tìm CTTQ của u_n , S_n ?

Bài 11. Ba số $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ có thể cùng có mặt trong một CSC hay CSN được hay không?

Bài 12. CMR $\forall n \in N^*$ có : 1. $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}.$ 2. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$

Bài 13. Tìm CTTQ của các dãy số sau:

$a)\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + n(n+1), \forall n > 1. \end{cases}$ $b).\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n > 0. \end{cases}$

c). $\begin{cases} u_1 = 2, u_2 = 5 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n, n > 0. \end{cases}$ d). $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = 0 \\ u_n - u_{n-1} + 2u_{n-2} + 1 = 0, n > 2. \end{cases}$

Bài 14. Cho dãy (u_n) xđ:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2n-3}{2n} u_{n-1}, \forall n > 1. \end{cases} \quad \text{CMR: } limS_n = 1.$$

Bài 15. Đặt $f(n) = (n^2 + n + 1)^2 + 1, \forall n \in N^*$. Dãy (u_n) xđ:

$$u_n = \frac{f(1).f(3).....f(2n-1)}{f(2).f(4).....f(2n)}, \forall n \in N^*. \qquad CMR: \lim n\sqrt{u_n} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Bài 16. Cho dãy số (u_n) có tính chất: $u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = K, (Const) \forall n > 1$.

Tính giới hạn $\lim \frac{u_n}{n^2} = ?$

Bài 17. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} 0 \le u_n \le 2 \\ u_n - 2.u_{n+1} + u_{n+2} \ge 0, \forall n \in N^*. \end{cases}$ $CMR: \ n(u_n - u_{n+1}) \le 2, \forall n \in N^*$.

Bài 18. Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_n = 3.u_{n-1} + 2n^3 - 9n^2 + 9n - 3, \quad n > 1. \end{cases}$

CMR với p là số nguyên tố thì $S_{p-1} \vdots p$.

Bài 19 Cho dãy (a_n): $a_1 = 1, a_n = \sqrt{2.a_{n-1}^2 + 1}, \forall n \in N^*$. CMR: $a_n = \sqrt{b_n - 1} = \sqrt{2^n - 1}$.

Bài 20 Cho dãy (a_n): $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{3}, a_n = \frac{a_{n-1}.a_{n-2}}{3.a_{n-2} - 2.a_{n-1}}$. CMR: $a_n = \frac{1}{2^{n-1} + 1}, \forall n \in N^*$.

Bài 21 Cho dãy (u_n): $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 8}{5}, \forall n \in N^*. \end{cases}$ và dãy (v_n): $v_n = u_n - 2, \ \forall n \in N^*$.

CMR: $v_n = (-\frac{1}{5})^n$

Bài 22 Có tồn tại CSN chứa đồng thời 3 phần tử: 2, 3, 5 không ?

Có tồn tại CSC chứa đồng thời 3 phần tử: 1, $\sqrt{3}$, 3 không ?

Bài 23 Cho $a_1, a_2, ..., a_k \ge 0; k \ge 2$ thỏa mãn: $a_1 + a_2 + ... + a_k > k$.

Đặt $u_n = a_1^n + a_2^n + ... + a_k^n, \forall n \in N^*$. CMR (u_n) là dãy tăng.

Tài liệu tham khảo

1. SGK Đại số lớp 11. (Chương trình không phân ban)
2. SGK Đại số lớp 11. (Chương trình phân ban)
3. Phương pháp quy nạp toán học. Nguyễn Hữu Điển
4. Một số bài toán chọn lọc về dãy số. Nguyễn Văn Mậu
5. Cơ sở lý thuyết và một số bài toán về dãy số. Võ Giang Giai
6. 10.000 bài toán sơ cấp – Dãy số và giới hạn. Phan Huy Khải
7. Bất đẳng thức.Phan Đức Chính.
8. Nâng cao giải tích 12. Phan Huy Khải.
9. Bồi dưỡng đại số 11. Phan Huy Khải.
10. Tuyển tập đề thi OLIMPIC 30-4, lần X – 2004.
11. Tuyển tập đề thi OLIMPIC 30-4, lần XI – 2005.
12. Tuyển tập đề thi OLIMPIC 30-4, lần XII – 2006.
13. Tuyển tập đề thi OLIMPIC 30-4, lần XIII – 2007.
14. Tuyển tập đề thi OLIMPIC 30-4, lần XIII – 2008.
15. Báo Toán học và tuổi trẻ.